2017-2018 DÖNEMİ MAT101 ANALİZ 1 DERSİ ARASINAV SORULARI VE CEVAPLARI

1) Aşağıda verilen yargılardan hangilerinin doğru hangilerinin yanlış olduğunu belirleyiniz.

a) x rasyonel sayı, y irrasyonel sayı ise $x+y$, $x-y$ irrasyoneldir.	D
b) x rasyonel sayı, y irrasyonel sayı ise xy, x/y rasyoneldir.	Y
c) x,y irrasyonel sayı ise $x+y$, xy irrasyoneldir.	Y
d) $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cap D)$	D
e) $f:X\to Y$ fonksiyonu birebir ve örten ise $f^{-1}:Y\to X$ fonksiyonu da birebir ve örtendir.	D
f) $\varnothing,\mathbb{R}$ kümeleri hem açık hem de kapalı kümelerdir.	D
g) $\mathbb{R}$'deki her sınırlı dizi yakınsaktır.	Y
h) Sonsuz küçük iki dizinin bölümü de sonsuz küçüktür.	Y
j) Sonsuz büyük iki dizinin toplamı da sonsuz büyük olur.	Y

2) $A,B\subset\mathbb{R}$ ve $C=\{x+y : x\in A, y\in B\}$ olsun. $A,B\subset\mathbb{R}$ altkümeleri üstten sınırlı ise C kümesi de üstten sınırlı olup $\sup C=\sup A+\sup B$ olduğunu gösteriniz.

$A=X$
$B=Y$ o.ü.
$C=X+Y$ olsun.

Çözüm: $\sup X = B_1$ ve $\sup Y = B_2$ olsun. Her $x\in X$ için $x\le B_1$ ve her $y\in Y$ için $y\le B_2$ olduğundan her $x+y\in(X+Y)$ için $x+y\le B_1+B_2$ olur. Buradan, $X+Y$ nin üstten sınırı olduğu görülür. Üst sınırın ikinci karakteristik özelliğine göre herhangi $\epsilon>0$ sayısı verildiğinde

$$\begin{array}{lll} \exists\, x_\epsilon\in X & \text{öyleki} & x_\epsilon > B_1-\epsilon/2 \\ \exists\, y_\epsilon\in Y & \text{öyleki} & y_\epsilon > B_2-\epsilon/2 \end{array}$$

olur. Buradan $x_\epsilon+y_\epsilon\in(X+Y)$ ve $x_\epsilon+y_\epsilon>B_1+B_2-\epsilon$ elde edilir.

3) Her $n\in\mathbb{N}$ için $2\cdot1+3\cdot2+4\cdot2^2+\cdots+(n+1)2^{n-1}=n\cdot2^n$ eşitliğinin doğruluğunu tümevarımla gösteriniz.

$$2.1+3.2+4.2^2+\cdots+(n+1)2^{n-1}=n.2^n$$

1) $n=1$ için $2.1=1.2$ olur. Şu halde eşitlik $n=1$ için doğrudur.

2) n = k için doğru, yani

$$2.1+3.2+\cdots+(k+1)2^{k-1}=k2^k$$

olsun.

3) Yukarıdaki son eşitliğin her iki yanına $(k+2)2^k$ eklenirse

$$\begin{aligned} 2.1+3.2+\cdots+(k+1)2^{k-1}+(k+2)2^k &= k2^k+(k+2)2^k \\ &= [k+(k+2)]2^k = 2(k+1)2^k \\ &= (k+1)2^{k+1} \end{aligned}$$

bulunur. Bu da eşitliğin $n=k+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Şu halde verilen eşitlik her $n\in\mathbb{N}$ için doğrudur.

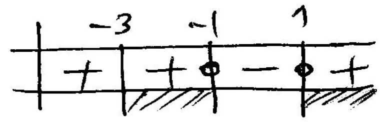
4) $\mathbb{R}$'de sonlu sayıda açık kümenin kesişiminin açık küme olduğunu ve sonlu sayıda kapalı kümenin birleşiminin kapalı olduğunu gösteriniz.

I sonlu o.ü. $\{U_i\}_{i\in I}$ sonlu açık kümelerini alalım ve $U=\bigcap_{i\in I} U_i$ olsun. $\forall a\in U$ için $a\in U_i$ $(i\in I)$ olup $U_{\delta_i}(a)\subset U_i$ o.ş. $\delta_i>0$ sayıları vardır. $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_n\}$ alınırsa $U_\delta(a)\subset U_{\delta_i}(a)\subset U_i$ olup $U_\delta(a)\subset U$ bulunur. Bu ise U-nun açık old. anlamına gelir. De Morgan kuralıyla diğeriside ispatlanır.

5) $f(x)=\underbrace{\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)}_{f_1}+\underbrace{\sqrt{9-x^2}}_{f_2}-\underbrace{\log_{x+3}\left(x^2-1\right)}_{f_3}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

$D_{f_1}=\{x\in\mathbb{R}: \ -1\leq\frac{x-3}{2}\leq 1\} = [1,5]$

$D_{f_2}=\{x\in\mathbb{R}: \ 9-x^2\geq 0\} = [-3,3]$

$D_{f_3}=\{x\in\mathbb{R}: \ x+3\neq 1, x+3>0, \ x^2-1>0\} \Rightarrow$ 

$= (-3,-1)\setminus\{-2\}\cup(1,+\infty).$

$D_f = D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3} = (1,3]$

6) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3-5}$, $g(x)=\begin{cases} x^3+\sin x, & x\geq 0 \\ -x^3-\sin x, & x<0\end{cases}$, $h(x)=\cos(\arccos x)$ fonksiyonlarının tek veya çift olup olmadığını inceleyiniz.

$f(-x)=\frac{x^2-x-1}{-x^3-5}$ olup $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$ old. dan ne tek nede çift

$g(-x)=\begin{cases} -x^3-\sin x, & x\leq 0 \\ x^3+\sin x, & x>0\end{cases} = g(x)$ old. dan çifttir.

$h(x)=\cos(\arccos x)=x$ old. dan tek fonk. dur.

7) $\tanh([\![x]\!]+1)=\frac{1}{2}$ ve $\ln\sqrt{x}-\sqrt{\ln x}=4$ denklemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

$\to [\![x]\!]+1=\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right)=\ln\sqrt{3}\Rightarrow$

$[\![x]\!]+1=\ln\sqrt{3}\Rightarrow [\![x]\!]=\ln\sqrt{3}-1 \Rightarrow Ç.K.=\emptyset.$

$\to \ln\sqrt{x}-\sqrt{\ln x}=4 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x-(\ln x)^{1/2}=4, \ x>0.$

$\ln x=u \Rightarrow \quad u-2\sqrt{u}=8 \quad u^2-16u+64=4u\Rightarrow$

$u^2-20u+64=0 \qquad u=4, \ u=16 \Rightarrow \ln x=4 \quad x=e^4$

$u \quad -4$ $\qquad \ln x=16 \quad x=e^{16}$

$u \quad -16$

8) $(a_n),(b_n)$ iki reel dizi ve $(a_n)\to a$, $(b_n)\to b$ olsun. Her $n \geq n_0$ için $a_n \leq b_n$ ise $a \leq b$ olur, gösteriniz.

$a_n \to a$: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n \geqslant n_1$ old. da $|a_n - a| < \varepsilon$ o.ş. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$

$b_n \to b$: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n \geqslant n_2$ " " $|b_n - b| < \varepsilon$ o.ş. $\exists n_2 \in \mathbb{N}$

vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa $\forall n \geqslant n_0$ old. da

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ ve $a_n \leq b_n \Rightarrow$

$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq b + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < b + \varepsilon$ olur

$\forall \varepsilon > 0$ için sağlandığından $a \leq b$ sonucu bulunur.

9) $\lim \log_n 2 = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\forall n > 2 (n \in \mathbb{N}$ için)

$$|\log_n 2 - 0| = |\log_n 2| = \frac{1}{\log_2 n} < \epsilon \Leftrightarrow n > 2^{\frac{1}{\epsilon}}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|2^{\frac{1}{\epsilon}}|]$ ($n_\epsilon = 1, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$|\log_n 2| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log_n 2 = 0$$

bulunur. ◇